两列等振幅相干波沿相反方向传播时叠加而形成驻波

结论：驻波实质上是一种特殊的振动，不是行波。

① **驻波波函数：** $y=(2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cdot)\cos 2\pi\nu t$

当 $\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|=1$ ⇒ $2\pi\frac{x}{\lambda}=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots$

$A(x)=A_{max}$ —— **波腹 (wave loop)**

当 $\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|=0$ ⇒ $2\pi\frac{x}{\lambda}=(2k+1)\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\ldots\ldots$

$A(x)=A_{min}$ —— **波节 (wave node)**

波腹： $(A' = 2A)$　　**波节：** $(A' = 0)$

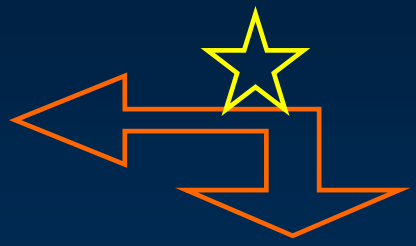
$$x = k\frac{\lambda}{2}$$

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

- **相邻波腹间的距离：**

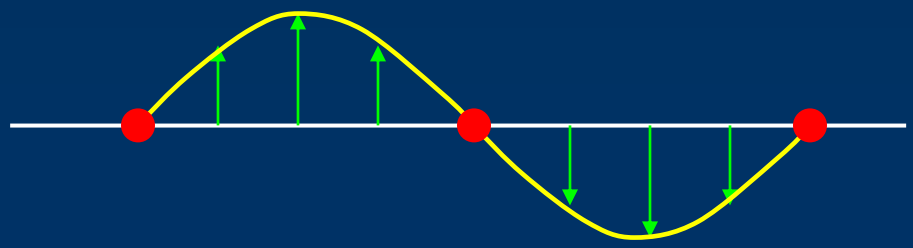
$$x_{k+1} - x_k = (k+1)\frac{\lambda}{2} - k\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$



- **相邻波节间的距离：**

$$x_{k+1} - x_k = [2(k+1)+1]\frac{\lambda}{4} - (2k+1)\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

② 所有波节点将媒质划分为长 $\lambda / 2$ 的许多段，每段中各质点振动振幅不同，但相位相同；而相邻段间各质点的振动相位相反。



为何会有这种现象呢？ **相邻段间各质点的振动相位相反**

解释：• 设某一时刻 t，$\cos\omega t > 0$

在 $x = 0$ 两侧的两个波节之间，（$x = 0$ 处是波腹）

即在 $x = -\frac{\lambda}{4}$ 与 $x = \frac{\lambda}{4}$ 两点之间，$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} > 0$

表明这一段中的所有各点均在平衡位置的上方。

• 设同一时刻 t，$\cos\omega t > 0$

在 $x = \frac{\lambda}{4}$ 右侧的波节之间，（$x = \frac{\lambda}{4}$ $x = \frac{3\lambda}{4}$）

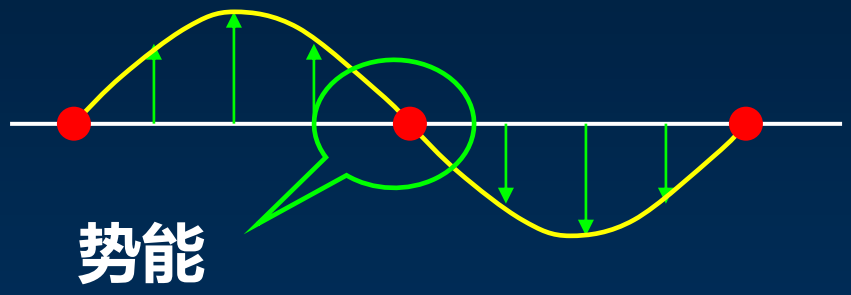
即在 $x = \frac{\lambda}{4}$ 与 $x = \frac{3\lambda}{4}$ 两点之间，$\cos 2\pi \frac{x}{\lambda} < 0$

表明这一段中的所有各点均在平衡位置的下方。

③ 没有能量的定向传播

能量只是在波节和波腹之间，进行动能和势能的转化。这是“驻”的另一层含义。

$t = 0$



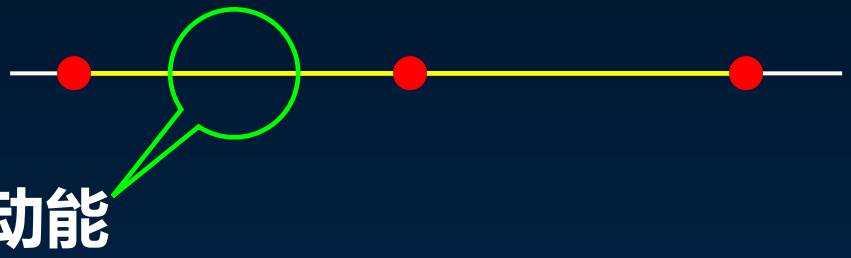
全部能量是势能。

但波节处的质元相对形变大，弹性势能大。

波腹处的质元形变为零，势能为零。

因此，能量主要集中波节附近。

$t = \frac{T}{4}$

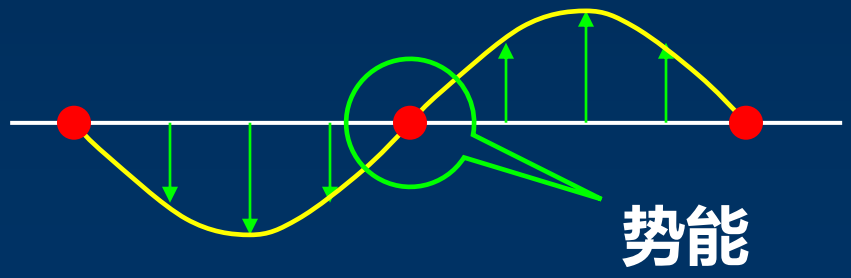


当各质元同时通过平衡位置时，

势能为零。能量全部是动能。

由于波腹处的质元速度最大，动能最大，因而能量主要集中于波腹附近。

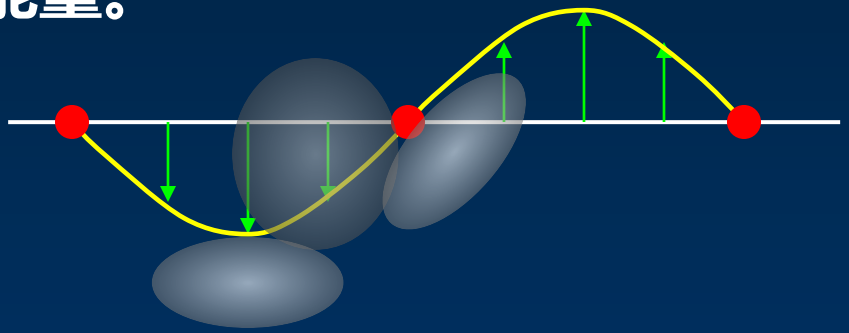
$t = \frac{T}{2}$



结论

从整个运动过程看，能量在相邻的波腹，波节间来回转换，它限制在以相邻的波腹和波节为边界的长为 $\frac{\lambda}{4}$ 的小区段中。

波节两侧的媒质互不交换能量，波腹两侧的媒质也互不交换能量。



问题

驻波的能量那里去了?

从能流情况看，两列波的平均能流相等，但传播的方向相反，故叠加后的平均能流等于零。即驻波没有单方向的平均能流，驻波不能传播能量。

说明

“振动状态的传播，相位的传播”是行波的特征。

驻波是波。

④ 半波损失 (half-wave loss)：

例：在弹性绳中，若为固定端反射，反射点为波节点，表明入射波与反射波是反相的。

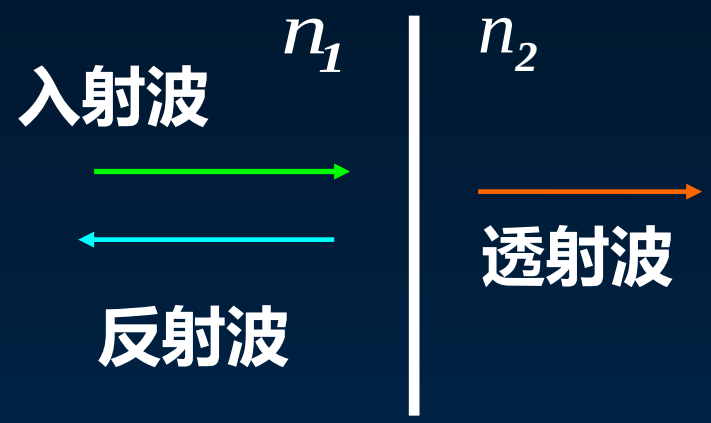
$$\Delta r = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi \quad \Longrightarrow \quad \Delta\varphi = \pi \quad \Longrightarrow \quad \Delta r = \frac{\lambda}{2}$$

- 相当于入射波与反射波之间附加了一个半波长的波程差。

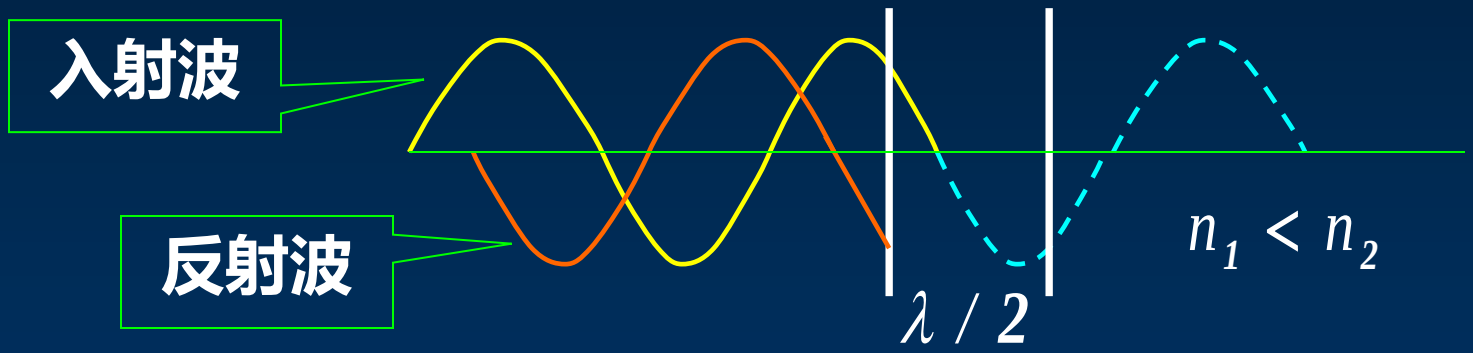
如果在自由端反射，反射点为波腹，没有半波损失

$n_1 < n_2$ 有半波损失（波节）

$n_1 > n_2$ 无半波损失（波腹）



- 透射波没有半波损失
- 反射波的波形

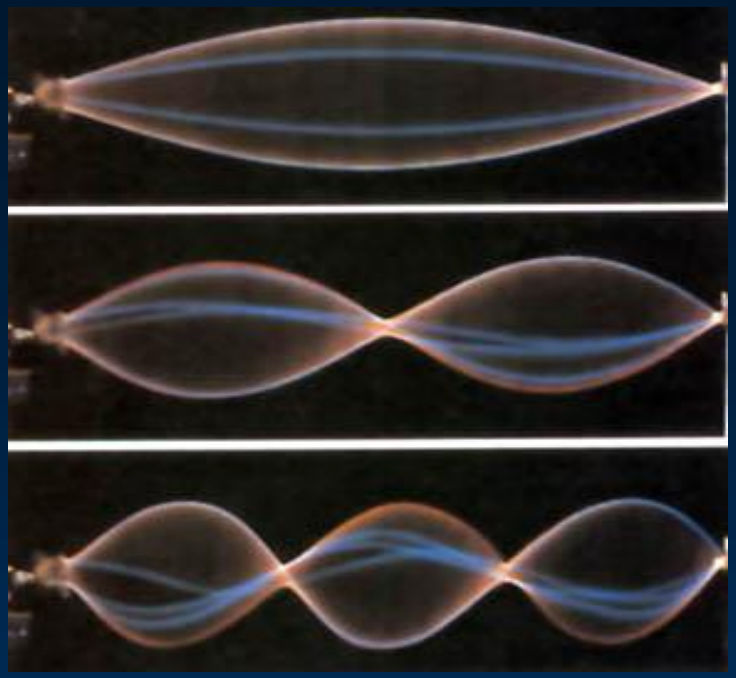


⑤ 简正模式：特定的振动方式称为系统的简正模式。

弦线长必须满足：

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

才能形成驻波。



$L = \lambda/2$

$L = \lambda$

$L = 3\lambda/2$

驻波频率为：

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{nu}{2L}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

$$n = 1, \nu_1 = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{2L}$$ 基频

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{nu}{2L} = n\nu_1$$ 谐频

结论：1）一个驻波系统有许多个固定频率。这和弹簧振子只有一个固定频率不同。

2）系统究竟按哪种模式振动取决于初始条件。

3）当外界驱动频率与某个简正模式的频率接近时，就会激起强驻波，称为共振。

例1： 平面简谐波 t 时刻的波形如图，波速为 u，沿 x 方向传播，振幅为 A，频率为 f。

求： (1) 以 D 为原点，写出波函数；

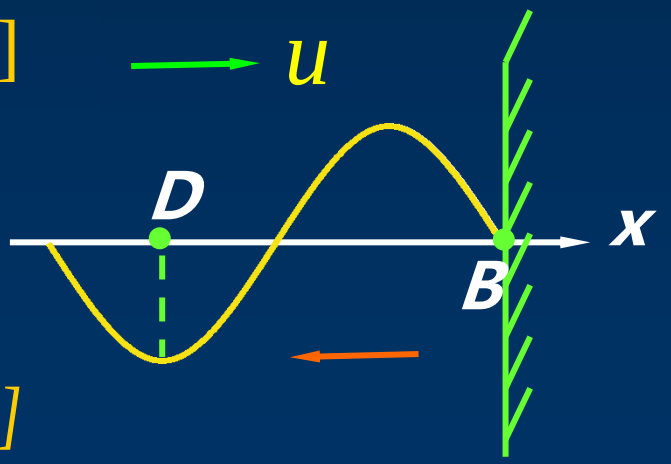
(2) 以 B 为反射点，且为波节，若以 B 为 x 轴坐标原点，求入射波，反射波方程；

(3) 求合成波，并分析波节，波腹的位置坐标。

解： (1) $y(x,t)=A\cos[2\pi f(t-\frac{x}{u})+\pi]$

(2) $y_{入}(x,t)=A\cos[2\pi f(t-\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}]$

$y_{反}(x,t)=A\cos[2\pi f(t+\frac{x}{u})+\frac{\pi}{2}]$



(3) $y(x,t)=y_{入}+y_{反}=2A\cos(2\pi f\frac{x}{u}+\frac{\pi}{2})\cos 2\pi ft$

$$=-\{2A\sin 2\pi f\frac{x}{u}\}\cos 2\pi ft$$

波腹 $\left|\sin 2\pi f\frac{x}{u}\right|=1 \Rightarrow 2\pi f\frac{x}{u}=\frac{2k+1}{2}\pi$

$$x=\frac{2k+1}{4}\cdot\frac{u}{f}=\frac{2k+1}{4}\lambda \qquad k=-1,-2,-3,.....$$

波节 $\left|\sin 2\pi f\frac{x}{u}\right|=0 \Rightarrow 2\pi f\frac{x}{u}=k\pi$

$$x=\frac{k}{2}\cdot\frac{u}{f}=\frac{k}{2}\lambda \qquad k=0,-1,-2,-3,.....$$

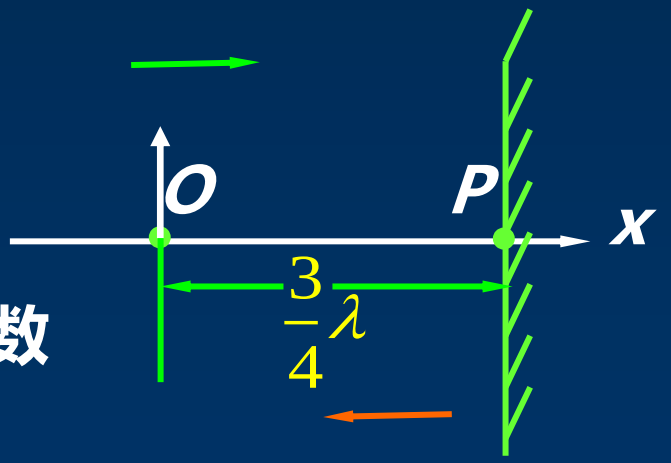
例2： 一平面简谐波沿 X 轴正向一反射面入射，如图所示，入射波的振幅为 A ，周期为 T，波长为 λ 。$t=0$ 时刻，在原点处的质元由平衡位置向位移为正的方向运动，入射波在界面处发生全反射，反射波的振幅等于入射波的振幅，而且反射点为波节。

求： (1) 入射波的波函数； (2) 反射波的波函数；

(3) 求合成波，并标出因叠加而静止的各点的坐标。

解： (1) 入射波在原点引起的振动

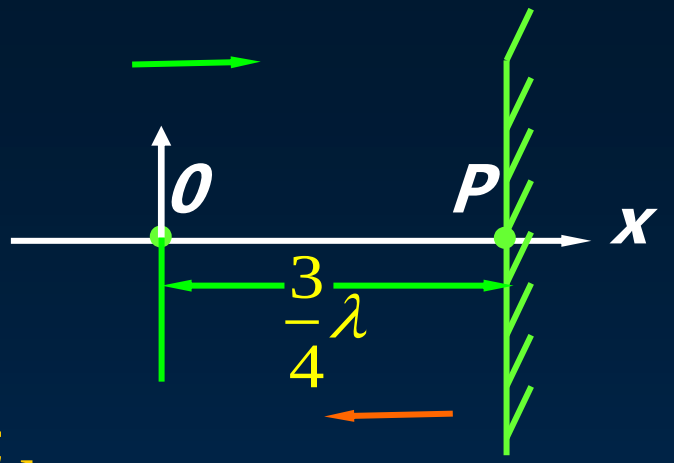
$$y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T})-\frac{\pi}{2}]$$



入射波沿 X 轴正方向传播，其波函数

$$y_{入}(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})-\frac{\pi}{2}]$$

(2) 入射波在P引起的振动



$$y_{入P} = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_P}{\lambda}) - \frac{\pi}{2}]$$

反射波在P引起的振动

$$y_{反P}(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x_P}{\lambda}) + \frac{\pi}{2}]$$

反射波沿X轴负方向传播，其波函数

$$y_{反}(x,t) = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x - x_P}{\lambda}) - 2\pi\frac{x_P}{\lambda} + \frac{\pi}{2}]$$

$$= A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x - 2x_P}{\lambda}) + \frac{\pi}{2}]$$

$$= A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) - \frac{\pi}{2}]$$

(3) 入射波与反射波叠加合成波的波函数

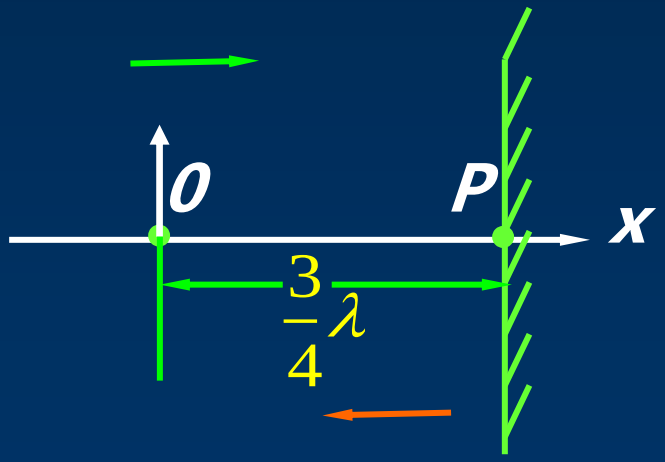
$$y(x,t) = y_{入} + y_{反} = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda})\cos(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2})$$

波节 $\left|\cos(2\pi\frac{x}{\lambda})\right| = 0 \Longrightarrow 2\pi\frac{x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

因叠加而静止的各点的坐标为

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4}$$

$$k = 1, 0, -1, -2, -3, \cdots\cdots$$



掌握各种情况下，波函数的求法；

注意半波损失问题。